

Estratto dal  
**Periodico di Matematiche**  
Giugno 1965 - Serie IV, vol. XLIII

**CARLO FELICE MANARA**

*Un teorema di Beppo Levi  
riguardante la logica formale*



Bologna  
**Nicola Zanichelli**  
Editore

**Editore NICOLA ZANICHELLI - Bologna**

Il **Periodico di Matematiche** continua la pubblicazione per le scuole medie che, iniziata in Roma da Davide Besso nel 1886, fu curata fino al 1896 da Aurelio Lugli, già dal secondo anno associato alla direzione e proseguita poi in Livorno da Giulio Lazzeri, fra il 1897 e il 1918; fu rinnovato da **Federico Enriques** nel 1921 e da Lui diretto fino al 1946.

Il **Periodico** pubblica soprattutto articoli riguardanti le matematiche elementari intese in senso lato ed altri tendenti ad una più vasta comprensione dello spirito matematico. Esso contiene inoltre relazioni del movimento matematico straniero, note di bibliografia e di trattatistica, varietà (problemi, giochi, paradossi etc.) nonchè notizie di carattere professionale.

---

I Collaboratori sono pregati di inviare i manoscritti alla direzione del **Periodico di Matematiche**, presso l'Istituto Matematico della Università di Milano - Via Saldini, 50.

I manoscritti non si restituiscono.

I libri inviati in dono verranno annunziati indipendentemente dalla recensione che potrà esserne pubblicata. Le recensioni sono fatte dalla Redazione del **Periodico**, ovvero da persone che ne ricevono l'incarico.

## *Un teorema di Beppo Levi riguardante la logica formale*

1 - Scopo di questo articolo è quello di richiamare l'attenzione dei nostri Lettori su un interessante teorema di logica formale di cui BEPPO LEVI diede la dimostrazione in una nota a piè di pagina di una sua memoria dal titolo « Fondamenti della metrica proiettiva » comparsa negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino ((2), 54 (1904) pag. 284).

Ci sembra interessante richiamare qui il teorema suddetto, perchè secondo i nuovi indirizzi di insegnamento della Matematica nei Licei l'insegnante dovrebbe presentare agli scolari il concetto di « sistema ipotetico deduttivo » che è tipico della matematica modernamente intesa e pertanto dovrebbe presentare ad essi le teorie matematiche secondo lo schema fondamentale: un insieme di assiomi, scelti in modo che non siano contraddittori tra loro, ed una catena di teoremi dedotti dagli assiomi posti.

Il teorema di BEPPO LEVI a cui facciamo riferimento riguarda appunto gli assiomi di una teoria (che Egli chiama, secondo l'usanza della scuola di G. PEANO « proposizioni primitive ») e la qualità fondamentale che gli assiomi devono possedere oltre a quella di essere compatibili: quella di essere tra loro indipendenti.

Abitualmente si distingue tra un sistema di assiomi *ordinatamente* indipendenti ed un sistema di assiomi *assolutamente* indipendenti, chiamando ordinatamente indipendenti certi  $n$  assiomi  $p_1, p_2, \dots, p_n$  enunciati in un certo ordine quando nessuno di essi può essere dedotto da quelli che lo precedono, e chiamando invece assolutamente indipendenti certi assiomi quando nessuno di essi può essere dedotto dai rimanenti (cioè da quelli che lo precedono oppure lo seguono nell'ordine prescelto).

La prima condizione (quella che gli assiomi siano ordinatamente indipendenti) è ovviamente meno restrittiva della secon-

da; e corrispondentemente la impresa di costruire un sistema di assiomi ordinatamente indipendenti appare molto meno faticosa della seconda; nel primo caso invero basta garantire che un determinato assioma tra gli  $n$  enunciati non dipenda da quelli che lo precedono nell'ordine prescelto ed a questo scopo basta trovare per ogni indice  $i$  (che non sia superiore ad  $n$ ) una interpretazione dei primi  $(i-1)$  assiomi che non soddisfi quello di posto  $i$ -esimo; nel secondo caso invece occorre escogitare per ogni assioma una interpretazione che non lo soddisfi, mentre soddisfa a *tutti* gli altri  $(n-1)$ .

Orbene il teorema di BEPPO LEVI dimostra che quando si sia costruito un sistema di assiomi ordinatamente indipendenti è possibile costruire un secondo sistema di assiomi che ha le due proprietà di essere equivalente al primo e di essere formato da assiomi assolutamente indipendenti.

Ci è piaciuto qui richiamarlo perchè, oltre all'interesse del teorema in sè, esso (come abbiamo già detto) appare enunciato e dimostrato come semplice osservazione in una nota a piè di pagina di una memoria che è dedicata a tutt'altro argomento e la dimostrazione è condotta con un simbolismo che non coincide più pienamente con il simbolismo della logica formale oggi in uso.

Vorremmo anche osservare che il teorema di BEPPO LEVI e la sua dimostrazione potrebbero essere presentati ad una scolaresca preparata come un utile esercizio di Algebra di BOOLE.

2. - Consideriamo un sistema  $S$  di  $n$  assiomi ( $n$  essendo un numero naturale):

$$(1) \quad S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\};$$

sussiste il

TEOREMA - *Se gli assiomi del sistema  $S$  sono ordinatamente indipendenti, sono assolutamente indipendenti gli assiomi del sistema  $S'$*

$$(2) \quad S' = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$$



Osserviamo poi, in secondo luogo, che le proposizioni del sistema  $S'$  possono essere scritte nella forma

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = p_1 \\ q_1 = \neg p_1 \vee p_2 \\ q_3 = \neg (p_1 \wedge p_2) \vee p_3 \\ q_4 = \neg (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee p_4 \\ \dots \dots \dots \\ q_i = \neg (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{i-1}) \vee p_i \\ \dots \dots \dots \\ q_n = \neg (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \vee p_n. \end{array} \right.$$

Segue immediatamente di qui che si ha

$$p_1 \wedge p_2 \leftrightarrow q_1 \wedge q_2$$

e, come si verifica immediatamente per induzione, è, per ogni indice  $i$  non superiore ad  $n$ :

$$q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_i \leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_i \quad (3).$$

Pertanto il sistema  $S'$  risulta essere equivalente al sistema  $S$ , perchè la proposizione formata dalla asserzione simultanea di tutte le proposizioni di  $S'$  risulta essere equivalente (cioè risulta possedere gli stessi valori di verità) di quella che si ottiene con la asserzione simultanea di tutte le proposizioni di  $S$ .

Si osservi ora che qualunque sia l'indice  $i$  (purchè ovviamente non maggiore di  $n$ ) è possibile rendere vera la proposizione

$$(6) \quad q_1 \wedge q_2 \dots \wedge q_{i-1} \wedge q_{i+1} \wedge \dots \wedge q_n \wedge \neg q_i$$

cioè constatare che la  $q_i$  non è deducibile in base a tutte le rimanenti del sistema  $S'$ .

---

(3) La verifica si eseguisce immediatamente tenendo presente che, qualunque siano le proposizioni  $a$  e  $b$ , si ha

$$a \wedge (\neg a \vee b) \leftrightarrow (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b) \leftrightarrow a \wedge b.$$

A tale fine basta considerare una interpretazione che renda vere tutte le proposizioni del sistema  $S$  fino all'indice  $i$  escluso e renda false tutte le proposizioni dalla  $i$ -esima all'ultima. Ciò è sempre possibile, perchè per ipotesi il sistema  $S$  è formato da proposizioni ordinatamente indipendenti; si verifica immediatamente che con una interpretazione cosiffatta la  $q_i$  risulta esser falsa, mentre tutte le altre  $q$  di indice diverso da  $i$  sono vere; pertanto risulta anche vera la (6); con che il teorema è completamente dimostrato.

3. - Per desiderio di completezza ricordiamo anche quanto scrive a proposito del teorema in oggetto ALESSANDRO PADOA (nell'articolo «LOGICA» che fa parte della Enciclopedia delle matematiche elementari Vol. 1° - Parte 1ª - Milano - 1930 - pag. 21, nota (5) a piè di pagina):

« Quest'osservazione (4) viene invocata da parecchi autori di trattati, per giustificare la negligenza nella scelta dei postulati. Ma pur riconoscendo la esattezza della trasformazione indicata (5) si può obiettare che:

1) il negare importanza al fatto che due postulati, oltrechè ordinatamente, siano assolutamente indipendenti, perchè, altrimenti, se ne possono ricavare (nel modo indicato) due che lo sono, autorizzerebbe similmente a negare importanza al fatto che due numeri naturali siano primi fra loro, perchè, altrimenti, se ne possono ricavare (dividendoli separatamente per il loro massimo comun divisore) due che lo sono;

2) nel caso in cui  $A$  e  $B$  siano ordinatamente ma non assolutamente indipendenti (cioè: se da  $A$  non segue  $B$ , ma da  $B$  segue  $A$ ) anzichè conservare  $A$  ed assumere  $B \vee \neg A$  (6) tra i *postulati* e quindi trasferire  $B$  tra i *teoremi* (come propone l'Autore (7)), noi conserviamo soltanto  $B$  tra i *postulati* e trasferiamo  $A$  fra i *teoremi*.

(4) Cioè la proposizione che noi chiamiamo qui teorema di Beppo Levi.

(5) Da Beppo Levi per passare dal primo al secondo sistema di assiomi.

(6) Trascriviamo la formula del Padoa con le notazioni che abbiamo deciso di usare in questo articolo.

(7) Beppo Levi.

Pertanto, conclude PADOA, ... in ogni trattato ben fatto le proposizioni primitive dovrebbero essere *assolutamente indipendenti*... ».

Non riteniamo di dover proseguire la discussione sui criteri per giudicare se un trattato sia oppure no *ben fatto* secondo i gusti del PADOA, perchè riteniamo che sul giudizio debbano influire non soltanto i gusti dell'autore, ma anche opportunità didattiche.

Infatti non è sempre facile conciliare il rigore logico e la efficacia didattica; riteniamo pertanto che ogni aiuto agli insegnanti per conseguire questo doppio scopo, fondamentale per l'insegnamento, sia di estrema utilità.

C. F. MANARA



**Abbonamento 1965: Italia L. 2.200**  
**estero L. 3.400**

Il Periodico si pubblica in 5 fascicoli annuali ed il prezzo dei singoli fascicoli in corso è: Italia L. 500 - estero L. 800

L'importo dell'abbonamento, la richiesta di fascicoli sciolti o annate arretrate e ogni altra comunicazione di carattere amministrativo va indirizzata alla Casa Editrice Zanichelli - via Irnerio, 34 - Bologna (conto corrente postale 8/36).

#### Annate arretrate

Sono disponibili le annate complete della serie in corso (quarta) qui indicate:  
1939 - 40 - 41 - 42 - 43 - 46 - 47 - 48 - 52 - 53 - 54 - 55 - 56 - 57 - 58 - 59  
60 - 61 - 62 - 63 - 64

prezzo per l'Italia L. 2.200

prezzo per l'estero L. 3.400

Esistono anche fascicoli separati dei vari volumi al prezzo unitario di L. 800 per l'Italia e L. 1.200 per l'estero.

**BMS**  
**UNA COLLANA DEDICATA**  
**AD ARGOMENTI**  
**DI CARATTERE SCIENTIFICO**  
**TRATTATI SECONDO I CRITERI**  
**DELLA PIÙ MODERNA**  
**DIVULGAZIONE**

**CIASCUN VOLUME LIRE 600**

---

**I PRIMI VOLUMI**

**GALAMBOS / NERVI E MUSCOLI**  
INTRODUZIONE ALLA BIOFISICA

**GRIFFIN / GUIDANDOSI CON L'ECO**  
IL RADAR DAL PIPISTRELLO ALL'UOMO

**BOYS / LE BOLLE DI SAPONE**  
LE FORZE CHE LE MODELLANO

**BONDI / SGUARDI SULL'UNIVERSO**  
PROBLEMI DI COSMOLOGIA

**BATTAN / LE NUBI**  
INTRODUZIONE ALLA METEOROLOGIA APPLICATA

**WILSON/LITTAUER / ACCELERATORI DI PARTICELLE**  
MACCHINE DELLA FISICA NUCLEARE

**MACDONALD / VERSO LO ZERO ASSOLUTO**  
LA FISICA DELLE BASSE TEMPERATURE

**SHAPIRO / PROFILI VELOCI**  
LA RESISTENZA AL MOTO NEI FLUIDI

**OVENDEN / LA VITA NELL'UNIVERSO**  
DISCUSSIONE SCIENTIFICA DEL PROBLEMA

**BATTAN / IL RADAR ESPLORA L'ATMOSFERA**  
NUOVE CONOSCENZE NELLA FISICA DELLE NUVOLE

---

PER ULTERIORI INFORMAZIONI CHIEDERE L'OPUSCOLO ILLUSTRATO A

**ZANICHELLI EDITORE**

VIA IRNERIO 34 BOLOGNA



**BMS**

**Biblioteca di Monografie**  
**Scientifiche**



**Zanichelli Bologna**



**BMS**